Trabajo Práctico Nro. 2

Funciones Complejas. Funciones Holomorfas.

1. Expresar cada una de las siguientes funciones en la forma $u(x,y)+i\,v(x,y)$ donde u y v son funciones reales:

   (a) $f(z)=z^2$ (b) $f(z)=2\,\bar{z}-2\,i\,z$

   (c) $f(z)=2|z|^2-\dfrac{3i}{z-1}$ (d) $f(z)=\dfrac{z-i}{z+1}$

2. Describir el dominio de las funciones:

   (a) $f(z)=z^2+i2z$ (b) $f(z)=\dfrac{y}{x}+i\,\dfrac{1}{1-y}$ (c) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$

   (d) $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}-i}$ (e) $f(z)=\dfrac{1}{1-|z|}$

3. Hallar, si existen, los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{z\to 2+3i}(z-5i)^2$ (b) $\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{z^2+3}{iz}$ (c) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^2-1}{z-1}$

   (d) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\bar{z}}$ (e) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}^2}{z}$ (f) $\lim\limits_{z\to 0}(\dfrac{\bar{z}}{z})^2$

   (g) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{x+y-1}{z-i}$ (h) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+1}{z^2+z+1-i}$ (i) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^3+3iz^2+7}{z^2-i}$

4. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios complejos de grado n y m respectivamente. Estudiar el $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ para $n>m$, $n=m$ y $n<m$

5. Analizar la continuidad de las funciones:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(z+i)^2+1}{z} & \text{si } z\neq 0\\[2ex] i & \text{si } z=0\end{cases}\qquad \text{en el origen.}$$

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3-1}{z-1} & \text{si } |z|\neq 1\\[2ex] 1 & \text{si } |z|=1\end{cases}\qquad \text{en los puntos } 1,\ -1,\ i \text{ y } -i.$$

6. Probar que la función $f(z)=\mathrm{Arg}(z)$ es discontinua en todo punto del eje real no positivo.

7. Sean las funciones definidas para todo $z\neq 0$:

   (a) $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{z}$ (b) $f(z)=\dfrac{z}{|z|}$ (c) $f(z)=\dfrac{z\,\mathrm{Re}\,z}{|z|}$ (d) $f(z)=z\,\mathrm{cis}(\dfrac{i}{|z|})$

   ¿Cuáles pueden ser definidas en $z=0$ de modo que sean continuas en ese punto?

8. Sabiendo que la función $f(z)$ es continua en un conjunto abierto D, ¿qué se puede decir sobre la continuidad de $|f(z)|$, $\bar{f}(z)$, $f(\bar{z})$ y $\dfrac{1}{f(z)}$?

9. Supongamos que z_0 es un punto de discontinuidad de las funciones $f(z)$ y $g(z)$. Analizar si z_0 también es punto de discontinuidad de las funciones $f(z)+g(z)$, $f(z)\,g(z)$ y $\dfrac{f(z)}{g(z)}$.

10. Determinar los puntos en los cuales las funciones dadas tienen derivada y en esos puntos calcularlas:
    (a) $f(z) = x^2 + i\,y^2$ (b) $f(z) = (x-iy)e^{-(x^2+y^2)}$
    (c) $f(z) = \dfrac{x^2}{y} + i\,2xy$ (d) $f(z) = \operatorname{Im} z$
    (e) $f(z) = z\operatorname{Re} z + z\operatorname{Im} z$ (f) $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$
    (g) $f(z) = 3iz + z^2$ (h) $f(z) = |z|$
    (i) $f(z) = (z-3i)^5$ (j) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 2\bar{z}$
    (k) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ (l) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{z-1}{(z^2-1)(z-2)}$

11. Sea $f(z) = |z|^2$. Verificar que las condiciones de Cauchy Riemann se cumplen sólo si $z=0$. ¿Qué se puede decir acerca de las existencia de $f'(z)$ si $z \neq 0$? ¿Existe $f'(0)$?

12. Demostrar que la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^3}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

    no es derivable en $z=0$ pero que las condiciones de Cauchy Riemann se verifican en ese punto.

    Este ejemplo muestra que <u>las condiciones de Cauchy Riemann no son suficientes para asegurar la derivabilidad</u>.

13. Mostrar que $f(z) = |z|$ <u>no es derivable en ningún punto</u>. Confrontar con la diferenciabilidad de $\sqrt{x^2+y^2}$ como función de $\mathbb{R}^2$.

14. (a) Probar que si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es derivable en (x,y) entonces

$$|\mathrm{detDf}(x,y)| = J\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix} = |f'(z)|^2$$

    (b) Sean $f(z) = z^3$, $z_1 = 1$ y $z_2 = i$. Probar que no existe un punto z_0 sobre el segmento de recta que une a z_1 y z_2 tal que $f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1)$. Este ejemplo muestra que <u>el teorema del valor medio para funciones reales no se extiende a las funciones complejas</u>.

15. Sea $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$. Probar que si $f'(z)$ es continua en z_0 entonces u y v son $\mathcal{C}^1$ en (x_0, y_0).

16. Decir en qué puntos del plano complejo son holomorfas las funciones del ejercicio 10. ¿Alguna es entera?

17. Determinar para qué valores de a y $b \in \mathbb{R}$, $f(z) = (ax + 2y) + i(-2x + by)$ es una función entera.

18. Hallar la función holomorfa que satisface las siguientes condiciones:

    (a) $\begin{array}{l} f'(z) = 3z^2 + 4z - 3 \\ f(1+i) = -3i \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} \mathrm{Re}[f'(z)] = 3x^2 - 4y - 3y^2 \\ f(1+i) = 0 \end{array}$

19. (a) Hallar todas las funciones $f(z)$ continuas en $\mathbb{C}$ tales que $f(z) = \bar{f}(z)$.
    (b) Hallar todas las funciones $f(z)$ holomorfas en $\mathbb{C}$ tales que $f(z) = \bar{f}(z)$.
    (c) ¿Es cierto que si $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ entonces $g(z) = \bar{f}(\bar{z})$ es holomorfa en $\mathbb{C}$?
    (d) ¿Existe f holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f'(z) = xy^2$?

20. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas y justificar:

    (a) Si $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $\mathrm{Re} f(z) = \mathrm{Im} f(z)$ en $\mathbb{C}$, entonces $f(0) \neq f(1)$.
    (b) Si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y si $|f(z)+1| = 1\ \forall z \in \mathbb{C}$, entonces $f$es constante en $\mathbb{C}$.

21. Un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ se denomina dominio o recinto.

    (a) Indicar cuáles de los siguientes conjuntos son dominios de $\mathbb{C}$:
        (i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}(z) \neq 0\}$ (ii) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$
        (iii) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) > 0\}$ (iv) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |\mathrm{Re}(z)| < 1\}$
        (v) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ (vi) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| > 4\}$
        (vii) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ y } |z| > 2\}$
    (b) Dar un ejemplo de una función no constante y holomorfa en un conjunto D con $f'(z) = 0$ para toda $z \in D$.

22. Sea D un dominio del plano complejo.

    (a) Probar que si $f(z)$ y $\bar{f}(z)$ son holomorfas en D entonces f es constante en D.
    (b) Probar que dos funciones holomorfas en D que coinciden en un punto de D, y tienen igual parte real, son iguales en todo D.

23. Probar que para $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ en coordenadas polares, las ecuaciones de Cauchy Riemann son:
    $$r\, u_r = v_\theta \quad , \quad r\, v_r = -u_\theta$$
    y si f es derivable en $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i \operatorname{sen}\theta_0)$, entonces
    $$f'(z_0) = (\cos\theta_0 - i \operatorname{sen}\theta_0)(u_r + iv_r)$$

Funciones Elementales y Multiformes

24. Para las siguientes funciones:

    (i) $f(z)=az+b$ (ii) $f(z)=\dfrac{1}{z}$ (iii) $f(z)=\bar{z}$ (iv) $f(z)=z^2$ (v) $f(z)=|z|$

    (a) Indicar dominio, imagen y puntos de continuidad.

    (b) Hallar la relación inversa indicando si es univaluada o multivaluada.

25. Escribir las siguientes expresiones en forma binomial:

    (a) e^{2+i2} (b) e^3e^{i2} (c) e^i

    (d) $\operatorname{sen}(4+i2)$ (e) $\cos(e^{1+3i})$ (f) $\operatorname{tg}(i)$

    (g) $\operatorname{sh}(\frac{1}{1-i})$ (h) $\operatorname{Log}(1-i)$ (i) $(-i)^{2i}$ (sólo el valor principal)

26. Verificar que:

    (a) $\exp(0)=1$ (b) $\exp(i\frac{\pi}{2})=i$ (c) $\exp(z+i\pi)=-\exp(z)$ (d) $\overline{\exp(z)}=\exp(\bar{z})$

27. Demostrar que:

    (a) $\exp(i\bar{z})\neq\overline{\exp(iz)}$, a menos que $z=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

    (b) $\cos(i\bar{z})=\overline{\cos(iz)}$ para todos los valores de z.

    (c) $\operatorname{sen}(i\bar{z})\neq\overline{\operatorname{sen}(iz)}$, a menos que $z=k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$.

28. Resolver las siguientes ecuaciones:

    (a) $\exp z=1$ (b) $\cos z=0$ (c) $\cos z=10$

    (d) $\operatorname{sen} z=0$ (e) $\operatorname{sen} z-a=0$ $(|a|\leqslant 1)$ (f) $\operatorname{ch} z=\dfrac{1}{2}$

    (g) $\operatorname{sh} z=2i$ (h) $\operatorname{Log} z=i\frac{\pi}{2}$ (i) $\operatorname{sh}(2z-1)=2i$

    (j) $(\exp z-1)^3=1$ (k) $\cos(\dfrac{1}{z})+1=0$ (l) $(\operatorname{Log} z)^2+\operatorname{Log} z=-1$

29. Para las siguientes funciones:

    (i) $f(z)=\exp z$ (ii) $f(z)=\operatorname{sen} z$ (iii) $f(z)=\cos z$ (iv) $f(z)=\operatorname{sh} z$
    (v) $f(z)=\operatorname{ch} z$ (vi) $f(z)=\operatorname{Arg} z$ (vii) $f(z)=\operatorname{Log} z$

    (a) Obtener $\operatorname{Re}(f)$ y $\operatorname{Im}(f)$.

    (b) Indicar dominio e imagen. Hallar sus ceros. Estudiar periodicidad.

30. (a) Demostrar que $f(z)=\exp(iz)$ está acotada en el semiplano superior (es decir, probar que $\exists\, M>0/\ |f(z)|<M,\ \forall\, z:\operatorname{Im}(z)>0$). ¿Qué puede afirmar al respecto de $f(z)=\exp(-iz)$?

    (b) Investigar si $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ están, o no, acotadas en el semiplano superior y en el inferior.

31. Probar que:

    (a) $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$

    (b) $|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sen}^2(y)$

    (c) $|\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{sh}^2(x) + \cos^2(y) = \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$

32. Determinar si existen los siguientes límites en el plano complejo ampliado $\mathbb{C}^*$:

    (a) $\lim_{z\to\infty} \exp z$ (b) $\lim_{z\to\infty} \exp(-z^2)$ (c) $\lim_{z\to 0} \exp(-|z|^2)$

33. (a) Para las funciones del ejercicio 29, determinar los puntos en que son continuas, derivables y/o holomorfas.

    (b) Calcular $f'(z)$ en $z = z_0$, siendo:

    (i) $f(z) = \operatorname{sh}(\operatorname{sen} z)$ $z_0 = \pi/4$ (ii) $f(z) = \exp(2\operatorname{ch} z)$ $z_0 = i$

    (iii) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$ $z_0 = 2i$ (iv) $f(z) = \operatorname{Log}(\cos^2 z)$ $z_0 = \pi(1 + i)$

34. Estudiar continuidad y holomorfía de:

    (a) $f(z) = \operatorname{tg} z$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}$

    (c) $f(z) = \dfrac{1}{\exp z + 3}$ (d) $f(z) = \dfrac{1}{(\exp z - 1)(\operatorname{sen}(1+i)z)}$

    (e) $f(z) = e^{(x^2-y^2)}(\cos(2xy) + i\operatorname{sen}(2xy))$

    (f) $f(z) = \operatorname{sen}(\dfrac{x}{x^2+y^2})\operatorname{ch}(\dfrac{y}{x^2+y^2}) - i\cos(\dfrac{x}{x^2+y^2})\operatorname{sh}(\dfrac{y}{x^2+y^2})$

35. Hallar todos los valores de $\log(1 + i)$ y de $(1 + i)^{3+4i}$.

36. Comprobar que:

    (a) $\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2)$

    (b) $\log z_1 - \log z_2 = \log \dfrac{z_1}{z_2}$ pero $\operatorname{Log}(-1 - i) - \operatorname{Log} i \neq \operatorname{Log}(\dfrac{-1-i}{i})$

    (c) $z^a z^b = z^{a+b}$

    (d) $\dfrac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$

    (e) $\log z^a = a \log z$ pero $\operatorname{Log} i^3 \neq 3\operatorname{Log} i$

37. Para cada una de las siguientes funciones, describir el mayor dominio posible de holomorfía y calcular su valor en $z = i$:

    (a) $f(z) = \operatorname{Log}(2z + i)$ (b) $f(z) = \operatorname{Log}\left(\dfrac{1}{z(z-1)}\right)$

38. Determinar los puntos de ramificación y uniformizar las siguientes funciones:

    (a) $(z - 1 + i)^{\frac{1}{2}}$ (b) $((z - i)(z - 1))^{\frac{1}{2}}$ (c) $\log((z - 2i)(z + 3i))$

39. (a) Sea $F(z)$ una rama del logaritmo cuyo corte es la semirrecta $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im} z \geqslant 0\}$ y $F(-1) = -i\pi$. Hallar: $F(1)$, $F(-ie)$, $F(-e+ie)$, $F(-\sqrt{3}+i)$ y $F(e^{3i\pi/4})$.

    (b) Sea $G(z) = 1 + z^{\frac{1}{3}}$. Se considera la determinación de la $z^{\frac{1}{3}}$ definida para $z \neq iy$ con $y \geqslant 0$ cuyo valor en 1 es 1. Calcular $G(-1)$ y $G(-i)$.

    (c) Sea $H(z) = z + \log(z-3)$. Si se considera la determinación del $\log z$ definida en $\mathbb{C} - \{z = iy\ ,\ y \geqslant 0\}$, cuyo valor en $z = 1$ es 0, calcular el valor de $H(5)$, $H(2)$ y $H(3-i)$.

40. (a) Determinar una rama de $z^{\frac{1}{2}}$ tal que restringida a los reales positivos coincida con la raíz cuadrada y $(-1)^{\frac{1}{2}} = i$. ¿Es única?

    (b) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en su dominio con valores: $\sqrt[3]{-1} = -1$ y $\sqrt[3]{1} = 1$. ¿Cómo se relaciona esta función con la multivaluada raíz cúbica compleja?

41. Sean: (a) $w = \operatorname{arcsen} z$ (b) $w = \arccos z$ (c) $w = \operatorname{argsh} z$ (d) $w = \operatorname{argch} z$, las relaciones inversas de las funciones $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ y $\cos z$ respectivamente. Explicar por qué son multivaluadas y obtener la expresión de cada una de ellas en forma logarítmica.

Transformaciones del Plano Complejo

42. ¿En qué se transforman las rectas x=cte e y=cte bajo la aplicación $f(z) = \dfrac{1+3z}{2+z}$?

43. Transformar la región D del plano complejo mediante las funciones indicadas:

    (a) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leqslant 1\ ,\ \mathrm{Re}\, z > 3\ ,\ \mathrm{Im}\, z < 0\}$ $\qquad f(z) = \dfrac{1}{z-2}$

    (b) $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Arg}\, z < \dfrac{\pi}{4}\}$ $\qquad f(z) = \dfrac{z}{z-1}$

    (c) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\ ,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ $\qquad f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$

    (d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2\ \wedge\ |z-1| > 1\ ,\ \mathrm{Re}\, z < 1\ ,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ $\qquad f(z) = \dfrac{1}{z}$

    (e) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\ ,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ $\qquad f(z) = 1 + \dfrac{1}{z}$

44. Encontrar la transformación homográfica que transforma los puntos:

    (a) $-1,\ 0,\ 1$ en los puntos $1,\ i,\ -1$ respectivamente.

    (b) $-1,\ i,\ 1+i$ en los puntos $i,\ \infty,\ 1$ respectivamente.

    (c) $-1,\ \infty,\ i$ en los puntos $0,\ \infty,\ 1$ respectivamente.

45. Hallar la forma general de la transformación homográfica que transforma:

    (a) El semiplano superior en el interior del círculo unitario.

    (b) El interior del círculo unitario en el semiplano derecho, de modo que $f(z_1)=0$ y $f(z_2)=\infty$, donde z_1 y z_2 son dos puntos de la circunferencia $|z|=1$, tales que $\operatorname{Arg} z_1<\operatorname{Arg} z_2$.

46. Probar que la composición de homografías es una homografía.

47. Para cada una de las siguientes funciones:

    (i) $f(z)=az+b$ (ii) $f(z)=z^2$ (iii) $f(z)=\dfrac{i}{z-1}$ (iv) $f(z)=\dfrac{-z+2i}{iz-1}$
    (v) $f(z)=\exp z$ (vi) $f(z)=\operatorname{sen} z$ (vii) $f(z)=\cos z$ (viii) $f(z)=\operatorname{sh} z$

    se pide:

    (a) Indicar los puntos en donde la transformación es conforme.

    (b) Determinar la imagen por la transformación de la red cartesiana.

    (c) Estudiar las relaciones inversas en relación a los puntos (a) y (b).

48. ¿Es la suma de transformaciones conformes en un dominio D una transformación conforme en D? ¿Y el producto? Justificar.

49. (a) Hallar la imagen del primer cuadrante bajo la transformación $f(z)=z^3$.

    (b) Hallar la imagen del rectángulo $\{z : z = x+iy, 0<x<\dfrac{\pi}{4}, -1<y<1\}$ bajo la transformación $f(z)=\operatorname{sen} z$.

    (c) Hallar la imagen del sector $\{z : z = x+iy, -x<y<x,\ y<0\}$ bajo la transformación $f(z)=z^2$.

    (d) Hallar la imagen de la semi–banda $\{z : z = x+iy, 0<x<\dfrac{\pi}{2}\ ,\ y>0\}$ bajo la transformación $f(z)=\operatorname{sen}^2(z)$.

    (e) Hallar la imagen del disco $B(0,1)$ por la transformación $f(z)=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}$, especificando la rama de la raíz cuadrada elegida.

50. Describir $T(D)$ gráfica y analíticamente e <u>indicar con detalle</u> cómo se transforman por T los bordes de D:

    (a) $D=\{z\in\mathbb{C} : 0<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{Im} z>0\}$ y $T(z)=sen(2z-\frac{\pi}{2})+1+i$,

    (b) $D=\{z\in\mathbb{C} : \dfrac{\pi}{2}< Arg\, z<\dfrac{3}{4}\pi\}$ y $T(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$,

    (c) $D=\{z\in\mathbb{C} : 0<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2}$ y $0<\operatorname{Im} z<1\}$ y $T(z)=exp(iz)$.

    Estudiar, en cada caso, la biyectividad de T restringida a D.

51. Determinar una transformación conforme que transforme:

    (a) el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z\}$ en el círculo unitario,

    (b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ en $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$,

    (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \,,\, \operatorname{Im} z < 0\}$ en el primer cuadrante,

    (d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2} \ \wedge\ |z+1| < \sqrt{2}\}$ en el primer cuadrante,

    (e) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 2 \ \text{ y } \ \operatorname{Im} z > 0\}$ en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 1\}$.

    En cada caso, indicar cómo transforma el borde y si la transformación entre ambos conjuntos es biyectiva.